Kilka przydatnych wzorów z kombinatoryki

Wojciech Jamrozy

0.1 Kilka uwag wstępnych

Gdy mamy zbiór liczb (np. $\{1, 2, 3, 4\}$) to traktujemy go jako "worek" na obiekty.
Możemy elementy zbioru ustawić w ciąg: $(2, 3, 4, 1)$, $(4, 3, 2, 1)$, etc.
Taki ciąg nazywamy permutacją zbioru.
Ilość elementów zbioru A - jego moc - będę oznaczał wyrażeniem $\#A$
Przykład:
$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \#A = 4$.

Jeśli mamy zadanie związane z ciągami, to dobrą praktyką jest wyliczenie kilku pierwszych wyrazów ręcznie, a następnie wyszukanie ciągu na stronie: http://oeis.org. Dosyć często otrzymamy tam gotowy wzór, który następnie - jak przystało na olimpijczyka - trzeba udowodnić :)

0.2 Silnia i dwumian Newtona

0.2.1 Silnia

Poniższe wyrażenia czytamy "n silnia".
$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots 2 \cdot 1$
Przykłady: $5! = 120 \quad 1! = 1 \quad 0! = 1 \quad 3! = 6$
$n!$ oznacza ilość możliwych ciągów które możemy otrzymać poprzez ustawienie elementów zbioru o mocy n - czyli liczbę jego różnych permutacji.

Silnia jest bardzo szybko rosnącą funkcją:
$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
Algorytm o takiej złożoności działa jeszcze wolniej niż 2^n, $n^2 2^n$, etc.

0.2.2 Dwumian Newtona

Poniższe wyrażenie nazywamy dwumianem Newtona i czytamy "n po k":
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Zachodzą zależności (udowodnijcie je):
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ dla $0 < k < n$
$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

Doczytajcie o trójkącie Pascala. Jeśli zamiast każdego elementu trójkąta Pascala wstawimy jego resztę z dzielenia przez 2, to powstanie trójkąt Sierpińskiego.

0.3 Kombinacje i wariacje

Mamy dany zbiór A taki, że $\#A = n$

0.3.1 Wariacja z powtórzeniami

Wariacją z powtórzeniami nazywamy k wyrazowy ciąg złożony z elementów zbioru A. Elementy w ciągu mogą się powtarzać.
Liczba możliwych ciągów wynosi n^k - mamy k pozycji, a na każdej n możliwości.

0.3.2 Wariacja bez powtórzeń

Wariacją z powtórzeniami nazywamy k wyrazowy ciąg złożony z RÓŻNYCH elementów zbioru A:
$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
Mamy k pozycji. Na pierwszej możemy wstawić jedną z n liczb, na drugą wszystkie z wyjątkiem pierwszej - czyli $n-1$, itd.

0.3.3 Kombinacja bez powtórzeń

Kombinacją bez powtórzeń nazywmy k elementowy podzbiór zbioru A.
Gdy liczyliśmy wariację bez powtórzeń, dla każdego podzbioru liczyliśmy wszystkie jego permutacje, których jest $k!$:
$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

0.3.4 Kombinacja z powtórzeniami

W zbiorze elementy nie mogą się powtarzać, w multizbiorze tak. Przykładem multizbioru może być $\{3, 4, 4\}$.
Kombinacją bez powtórzeń nazywmy k elementowy multizbiór, którego elementy należą do A.
Liczba kombinacji bez powtórzeń wynosi $\binom{k+n-1}{k}$.
Dlaczego tak jest pokażę w dalszej części pdf-a.

0.3.5 Inne

Polecam książkę Witolda Lipskiego "Kombinatoryka dla programistów". Znajdziecie tam opisy różnych algorytmów (np. na generowanie kolejnych permutacji leksykograficznie; swoją drogą w STL mamy funkcje next_permutation i pref_permutation - polecam zapoznanie się). Ciągami liczbowymi z którymi warto się zapoznać są liczby Catalana, liczby Bella, liczby Stirlinga pierwszego i drugiego rodzaju oraz liczby Eulera pierwszego i drugiego rodzaju.

0.4 Przydatne Wzory

	kule rozróżnialne	pudełka rozróżnialne	dopuszczamy puste pudełka	liczba rozmieszczeń n kul w k pudełkach
a	tak	tak	tak	k^n
b	tak	tak	nie	$k!S(n,k)$
c	nie	tak	tak	$\binom{n+k-1}{n}$
d	nie	tak	nie	$\binom{n-1}{k-1}$
e	tak	nie	tak	$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$
f	tak	nie	nie	$S(n,k)$
g	nie	nie	tak	liczba podziałów n na co najwyżej k składników
h	nie	nie	nie	liczba podziałów n na dokładnie k składników

Uwagi:
a) Mamy ponumerowane pudełka i ponumerowane kule. Dla każdej z n kul mamy k mozliwości przyporządkowania pudełka. Przykład wariacji z powtórzeniami.

d) Wyobraźmy sobie n ponumerowanych piłeczek ustawionych w rzędzie pokolorowanych na czerwono. Zmieńmy kolor k piłeczek na niebieski. Układ pokolorowań piłeczek będzie kodował nasze rozmieszczenie nierozróżnialnych kul w rozróżnialnych pudełkach. i-ta pokolorowana na niebiesko piłeczka będzie reprezentowała i-te pudełko. Do i-tego pudełka wrzucamy tyle kul, ile czerwonych występuje po niej aż do następnej niebieskiej/końca + kulę reprezentowaną przez niebieską piłeczkę (dlatego nie ma pustych pudełek).
Każda kula musi należeć do jakiegoś pudełka, dlatego pierwsza piłeczka w zakodowanym rozwiązaniu musi byc niebieska. Oznacza to że liczba rozwiązań jest równa liczbie wyboru $k-1$ piłeczek do pokolorowania na niebiesko z $n-1$ piłeczek, czyli $\binom{n-1}{k-1}$.

c) Sytuacja analogiczna jak poprzednio, tylko tym razem będziemy kodowali rozwiązanie przy użyciu $n+k$ piłeczek, z których musimy wybrać k do pokolorowania na niebiesko. Tym razem możemy mieć puste pudełka, zatem piłeczka pokolorowana na niebiesko nie reprezentuje wrzucenia kuli do odpowiadającego pudełka. Pierwsza piłeczka również musi być pokolorowana na niebiesko, zatem liczba rozwiązań to:
$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$

Przy tej okazji wrócimy do kombinacji z powtórzeniami. Elementy zbioru A będą pudełkami, natomiast ilość kul w pudełkach oznacza ile razy dany element występuje w multizbiorze. Kul jest k, zatem multizbiór będzie miał rozmiar k. Liczba podziałów k kul w n pudełkach wynosi $\binom{k+n-1}{k}$

f) Liczby Stirlinga II rodzaju oznaczamy symbolem $S(n, k)$ bądź $\left\{{n \atop k}\right\}$. Oznaczają liczbę podziału n-elementowego zbioru na k bloków/podzbiorów, czyli dokładnie to, o co chodzi w niniejszym podpukcie. Zachodzą zależnośći:
$S(n, n) = S(n, 1) = 1$ - możemy to zrobić tylko na jeden sposób
$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$ - w pierwszym przypadku do istniejących rozwiazań dodajemy k-ty blok z elementem n, w drugim składniku zliczamy te rozwiązania w których mamy już k bloków, a n-ty element możemy dodać do każdego z nich.

e) Mamy podzielić kule na k pudełek i dopuszczamy pudełka puste - zatem musimy porozdzielać kule do co najwyżej k pudełek. Musi istnieć przynajmniej jedno niepuste pudełko, dlatego sumujemy od 1.

b) W liczbach Stirlinga II rodzaju dzielimy na k bloków, które są nieponumerowane. Jeśli chcielibyśmy je ponumerować - tak jak tutaj - to musimy rozwiązanie pomnożyć przez liczbę możliwych permutacji.

0.5 Diagram Ferrersa

Interesującą konstrukcją matematyczną jest diagram Ferrersa (doczytajcie w internecie).

Zadania:
a) udowodnić że liczba podziałów n na co najwyżej k składników jest równa liczbie podziałów $n+k$ na dokładnie k składników.
b) udowodnić że liczba podziałów n takich, że największy składnik jest równy k, jest równa liczbie podziałów n na dokładnie k składników.

Podział nazywamy samosprzężonym, jeśli jego diagram Ferrers jest symetryczny względem "przekątnej".
c) udowodnić, że liczba podziałów samosprzężonych n z największym składnikiem k jest równa liczbie podziałów samosprzężonych $n - 2k + 1$ z największym składnikiem nie przekraczającym $k - 1$.
d) udowodnić, że liczba podziałów samosprzężonych n jest równa liczbie podziałów n na nieparzyste składniki, gdzie każdy składnik występuje tylko raz.
Polecam link: http://sirjoker.w.interia.pl/mat/dyskr/_Partycje.pdf

0.6 Bibliografia

Tabelka z "Przydatnych wzorów" pochodzi z wykładu "Matematyka dyskretna" dr hab. Wita Forysia, prof UJ.